अध्यायः 10

# प्रायोगिकी ज्यामितिः

## 10.1 भूमिका

भवतां बहुविधैः आकारैः सह परिचयः अस्ति । भवन्तः स्वीय-गतकक्ष्यासु एतेषु आकारेषु केषाञ्चित् आकाराणां निर्माणं कथं क्रियते इति अधिगतवन्तः । उदाहरणार्थम् इदानीं भवन्तः प्रदत्तदीर्घतायाः रेखाखण्डः, कस्मिंश्चित् दत्त-रेखाखण्डस्य लम्बा रेखा, कोणः, कोणस्य समद्विभाजकम्, वृत्तम् इत्यादीनां रचनां कर्तुं शक्नुवन्ति । अधुना भवन्तः समान्तररेखाणां तथा च केषाञ्चित् त्रिभुजानाम् आलेखनविषये अधिगमिष्यन्ति ।

## 10.2 रेखायां अविद्यमान-बिन्दुना द्वारा गम्यमाना दत्त-रेखायाः समान्तरे रेखायाः निर्माणम्-

आयान्तु गतिविधेः माध्यमेन आरम्भं कुर्मः । (आकृतिः 10.1)

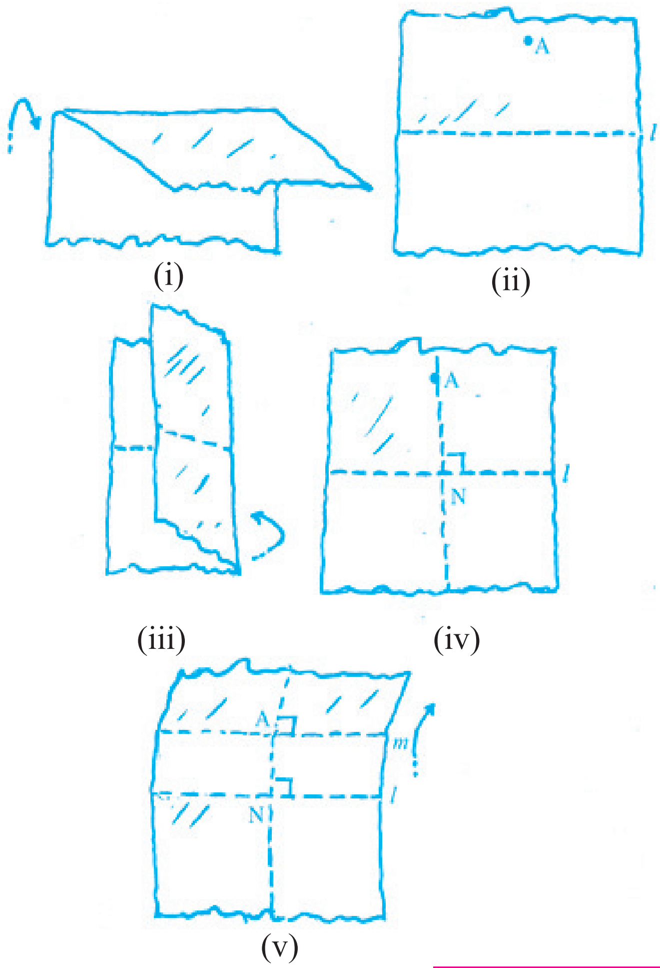
(i) एकं कागद-पत्रं स्वीकुर्वन्तु एतत् च वक्रीकृत्य एकं चिह्नं निर्मान्तु । एतद् वलयचिह्नम् एकां l इति रेखां निरूपयति ।

(ii) कागदपत्रम् उद्घाटयन्तु अस्मिन् कागदपत्रे l इति रेखायाः बहिः एकम् A इति बिन्दुम् अङ्कयन्तु ।

(iii) A बिन्दुतः गम्यमानस्य तथा च l इति रेखायां लम्बस्य एकवलयस्य चिह्नम् आकृतिः 10.1 निर्मान्तु । अस्य लम्बकस्य AN इति नामकरणं कुर्वन्तु ।

(iv) अधुना A इति बिन्दुना द्वारा अस्य लम्बस्य लम्बमानस्य एकवलयस्य चिह्नं निर्मान्तु । अस्याः नूतन-दीर्घ-रेखायाः m इति नाम कुर्वन्तु । अधुना $l \parallel m$ इति अस्ति । किं भवन्तः द्रष्टुम् अर्हन्ति यत् एवं किमर्थम् अस्ति ?

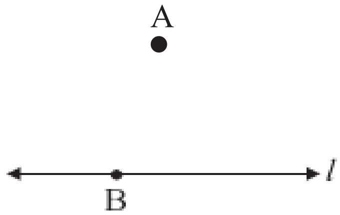
अत्र समान्तररेखाणां कतमः गुणः अथवा कतमाः गुणाः अस्मिन् कथने सहायतां कर्तुं शक्नुवन्ति यत् l तथा च m इति रेखे समान्तरे स्तः ?




आकृतिः 10.1

भवन्तः तिर्यग्-रेखाभिः तथा च समान्तररेखाभिः सम्बन्धितेषु गुणेषु कस्यापि गुणस्य प्रयोगं कृत्वा एतां रचनां केवलं मापिकां (रूलर) तथा च परिकारम् उपयुज्य कर्तुं शक्नुवन्ति।

**चरणः 1** ‘l’ इति एकां रेखां तस्याः च बहिः स्थितं कञ्चन ‘A’ इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु [आकृतिः 10.2(i)] ।

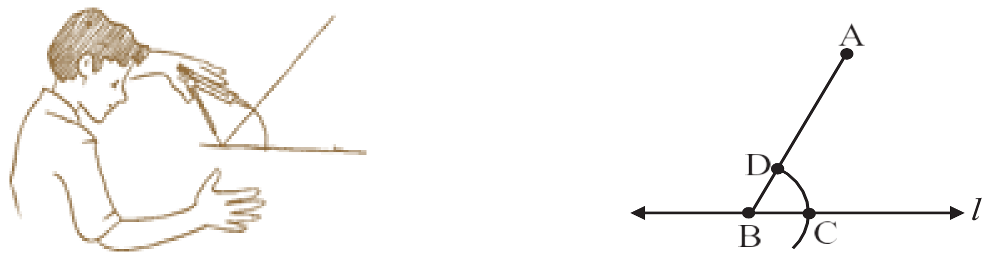



**(i)**

**चरणः 2** l इति एकां रेखां तथा च l इति रेखायां स्थितं कञ्चन B इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु एवञ्च A इति बिन्दुं B इत्यनेन बिन्दुना सह मेलयन्तु [आकृतिः10.2(ii)]।

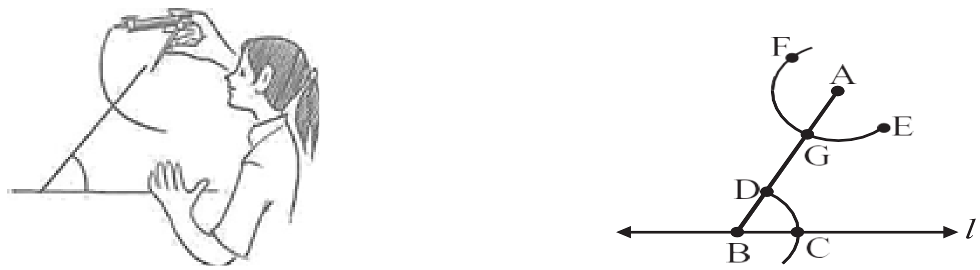

(ii)

**चरणः 3** B इति बिन्दुं केन्द्रं मत्वा एवञ्च सौकर्यानुसारं कामपि त्रिज्यां स्वीकृत्य, l इति रेखां C इत्यस्मिन् बिन्दौ एवञ्च BA इति रेखाम् D इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्तम् एकं चापम् आलिखन्तु। [आकृतिः10.2(iii)]।




(iii)

**चरणः4** अधुना A इति बिन्दुं केन्द्रं मत्वा एवञ्च तृतीय-चरणस्य एव चापं स्वीकृत्य AB इति रेखायां G इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्तं EF इति एकं चापम् आलिखन्तु [आकृतिः10.2 (iv)]।




(iv)

**चरणः 5** परिकरस्य तीक्ष्णशिरः C इत्यस्मिन् बिन्दौ स्थापयन्तु तथा च एताम् उद्घाट्य अनेन प्रकारेण समायोजयन्तु यत् अङ्कन्याः अग्रभागः D इत्यस्य उपरि भवेत् [आकृतिः10.2 (v)]।


(v)

**चरणः 6** G इति बिन्दुं केन्द्रं मत्वा एवञ्च परिकरस्य प्रसारं पञ्चमचरणस्य इव स्वीकृत्य H इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वन्तं EF इति एकं चापम् आलिखन्तु यत् EF इति चापम् H इत्यस्मिन् बिन्दौ छिन्द्यात्। [आकृतिः10.2 (vi)]।


(vi)

**चरणः7** अधुना AH इति मेलयित्वा m इति रेखाम् आलिखन्तु [आकृतिः10.2 (vii)]।


(vii)

**आकृतिः10.2 (i)-(vii)**

अवधानं कुर्वन्तु यत् $\angle ABC$ तथा च $\angle BAH$ इति एकान्तरौ अन्तःकोणौ वर्तेते। अतः $m \parallel l$ इति अस्ति।

## विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

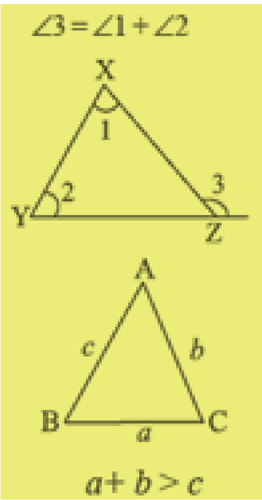
1. उपर्युक्तायां रचनायां किं भवन्तः A इति बिन्दुना द्वारा गम्यमानाम् एकाम् अन्यां रेखाम् आलेखितुं शक्नुवन्ति या $l$ इति रेखायाः समान्तरा स्यात्?
2. किं भवन्तः अस्यां रचनायाम् एतादृशं परिवर्तनं कर्तुं शक्नुवन्ति येन समानस्य एकान्तरस्य अन्तःकोणस्य स्थाने समानः सङ्गतकोणः निर्मितः भवेत् ?

## प्रश्नावली 10.1

1. AB इति एकां रेखाम् आलिखन्तु तस्याः च बहिः स्थितं कञ्चित् C इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। केवलं मापिकायाः एवं च परिकरस्य उपयोगं कुर्वन्तः C इति बिन्दुना द्वारा AB इत्यस्याः रेखायाः समान्तराम् एकां रेखाम् आलिखन्तु।

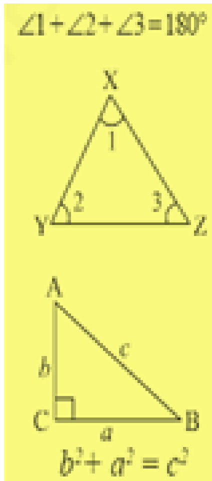
2. एकाम् l इति रेखाम् आलिखन्तु तथा च l इति रेखायां स्थिते कस्मिञ्चित् अपि बिन्दौ l इति लम्बं आलिखन्तु। अस्यां लम्बरेखायाम् X इति एकं बिन्दुं स्वकुर्वन्तु। यः l इत्यस्मात् 4 सेण्टीमीटरमिते दूरे स्थितः भवेत् । X बिन्दुतः l इत्यस्य समान्तराम् m इति एकां रेखाम् आलिखन्तु।
3. चिन्तनं कुर्वन्तु यत् $l$ इति एका रेखा अस्ति तथा च P इति एकः बिन्दुः अस्ति । अयं च P बिन्दुः l रेखायां स्थितः नास्ति । P बिन्दुना द्वारा l रेखायाः समान्तराम् एकां m इति रेखाम् आलिखन्तु । अधुना P बिन्दुं l रेखायाः Q इति केनचित् बिन्दुना सह मेलयन्तु । m रेखायां कञ्चित् R इति अन्यं बिन्दुं चिन्वन्तु । R बिन्दुतः भूत्वा PQ रेखायाः समान्तराम् एकां रेखाम् आलिखन्तु। चिन्तयन्तु यत् एषा रेखा l रेखया सह Sबिन्दौ मिलति। समान्तर-रेखाणाम् एताभ्यां द्वाभ्यां युग्माभ्यां का आकृतिः निर्मीयते ?

### 10.3 त्रिभुजानां रचना




एतस्य अनुच्छेदस्य पठनात् पूर्वम् एतत् सम्यक् भविष्यति यत् भवन्तः त्रिभुजानाम् अवधारणा-विषये विशेषरूपेण त्रिभुजानां गुणविषये एवं च त्रिभुजानां सर्वाङ्गमता-विषये ये अध्यायाः सन्ति तेषाम् अध्यायानां स्मरणं कुर्वन्तु।

भुजानां कोणानां च आधारेण त्रिभुजानां वर्गीकरणं कथं क्रियते इति भवन्तः जानन्ति । भवन्तः त्रिभुजैः सम्बन्धितानां निम्नलिखितगुणानां विषये अपि जानन्ति -




(i) कस्यचित् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः तस्य द्वयोः अभिमुखयोः अन्तःकोणयोः योगफलस्य समानः भवति।
(ii) त्रिभुजस्य त्रयाणाम् अन्तःकोणानां योगः 180°मितः भवति।
(iii) त्रिभुजस्य कयोश्चिद् अपि द्वयोः भुजयोः दीर्घतानां योगः तृतीय-भुजायाः दैर्घ्यात् अधिकः भवति।
(iv) कस्यचित् समकोण-त्रिभुजस्य कर्णस्य वर्गः अवशेषयोः भुजयोः वर्गाणां योगफलेन समानः भवति।

'त्रिभुजानां सर्वाङ्सनमता' इत्यस्मिन् अध्याये अस्माभिः दृष्टं यत् एकं त्रिभुजं प्राप्तुं शक्यते यदि तस्य निम्नलिखितेषु
मापसमूहेषु किमपि एकं दत्तं स्यात् -
(i) तिस्रः भुजाः
(ii) द्वे भुजे तयोर्मध्यवर्ती च कोणः
(iii) द्वौ कोणौ तयोर्मध्यवर्तिनी च भुजः
(iv) समकोणत्रिभुजस्य कृते कर्णः एकश्च पादः

अधुना, वयम् एतासाम् अवधारणानां प्रयोगं त्रिभुजरचनासु करिष्यामः।

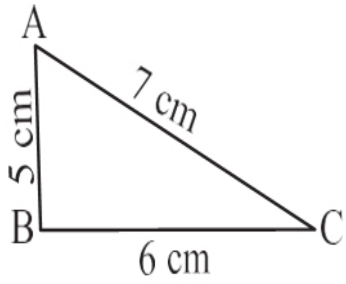
### 10.4 कस्यचित् त्रिभुजस्य रचना यदा तस्य त्रयाणां भुजानां दीर्घता दत्ता स्यात् (भुजात्रय-निकषः / SSS प्रमेयः)

अस्मिन् अनुच्छेदे वयं त्रिभुजानि रचयिष्यामः यदि तेषां तिस्रः भुजाः ज्ञाताः स्युः । पूर्वं वयम् अस्य अभ्यासाकृतिम् आलिखामः, येन तस्य भुजानां काचिद् ऊहा भवेत् पुनश्च त्रिषु भुजेषु एकभुजाम् आदाय रचनाम् आरभामहे। निम्नलिखितम् उदाहरणम् अवगच्छन्तु-

**उदाहरणम् 1** एकम् ABC इति त्रिभुजं रचयन्तु। यस्मिन् AB इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्मिता अस्ति, BC इति भुजः 6 सेण्टीमीटर् अस्ति एवञ्च AC इति भुजः 7 सेण्टीमीटर्मिताअस्ति।

**समाधानम्**

**चरणः 1** सर्वप्रथमं वयं प्रदत्तानां परिमाणानाम् एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः (अनेन अस्माकम् कृते अग्रे अतीव लाभः भविष्यति) [आकृतिः10.3 (i)]।

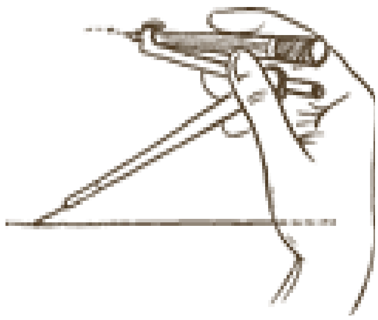


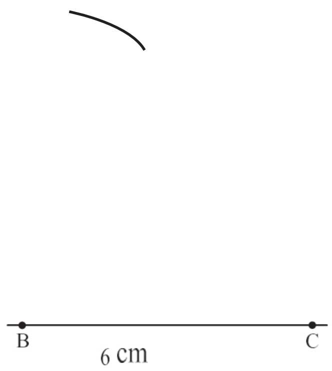
(i)

**चरणः 2** षट्सेण्टीमीटरमित-दैर्घ्यस्य एकम् BC इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु [आकृतिः10.3(ii)]।

(ii)

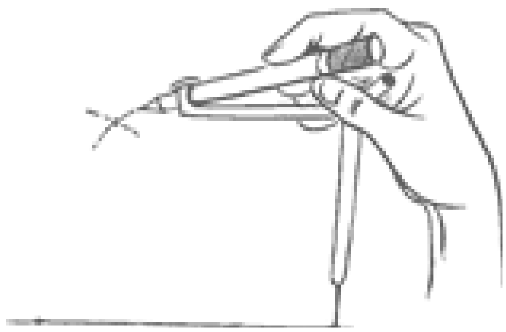
**चरणः 3** B बिन्दुतः A इति बिन्दुः पञ्चसेण्टीमीटरदूरे अस्ति। अतः, B बिन्दुं केन्द्रं मत्वा तथा च पञ्चसेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। (अधुना अस्मिन् चापे A कुत्रचित् स्थितः कश्चन बिन्दुः अस्ति। अस्मिन् चापे A कुत्र वर्तते इति ज्ञातव्यम्। जानीम इति अस्माकं कार्यम् अस्ति।) [आकृतिः10.4 (iii)]।

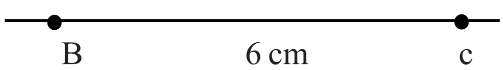




(iii)

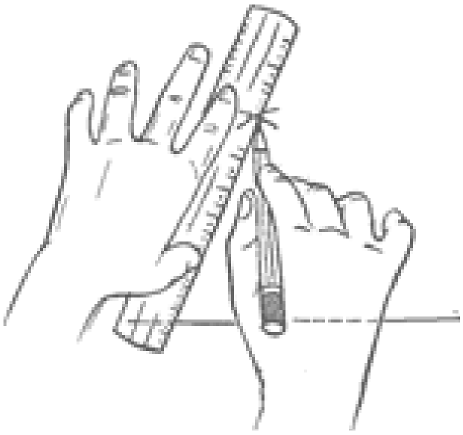
**चरणः4** C बिन्दुतः A इति बिन्दुः सप्तसेण्टीमीटरदूरे अस्ति। अतः C बिन्दुं केन्द्रं मत्वा तथा च सप्तसेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। (A बिन्दुः अस्मिन् चापे कुत्रचित् स्थितः भविष्यति। अस्माभिः ज्ञातव्यम् अस्ति यत् एषः बिन्दुः कुत्र स्थितः अस्ति ? ) [आकृतिः 10.3 (iv)]।

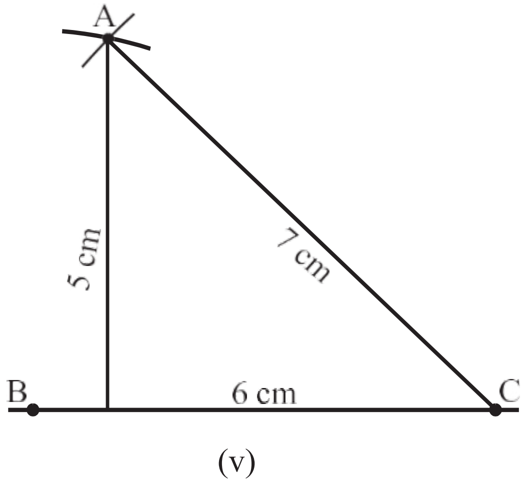




(iv)

**चरणः 5** A बिन्दुः आलिखितयोः एतयोः द्वयोः चापयोः स्थितः स्यात्। अतः एषः बिन्दुः अनयोः चापयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुः अस्ति। अनयोः चापयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुम् A इत्यनेन अङ्कयन्तु। AB तथा च AC इति द्वयं योजयन्तु। सम्प्रति $\Delta$ ABC इति त्रिभुजं सिद्धम् अस्ति। [आकृतिः10.3(v)]।






(v)

**आकृतिः 10.3 (i) – (v)**

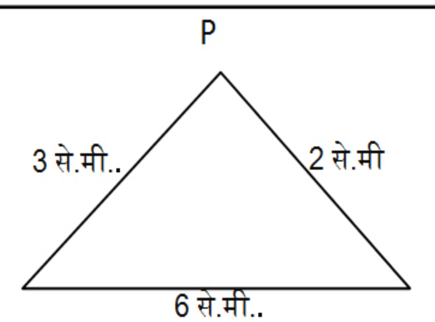
**एतान् कुर्वन्तु**

आगच्छन्तु इदानीम् DEF इति एकम् अन्यं त्रिभुजं रचयामः यस्मिन् DE इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्परिमितः, अस्ति, EF इति 6 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति तथा च DF इति भुजः 7 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति। $\Delta$ DEF इति त्रिभुजं छित्वा $\Delta$ABC इति त्रिभुजस्य उपरि स्थापयन्तु।

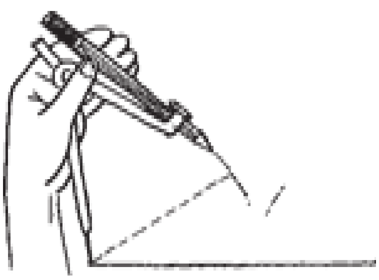
वयं पश्यामः यत् $\Delta$DEF इति त्रिभुजं $\Delta$ABC इति त्रिभुजं पूर्णतया आवृणोति अर्थात् तेन सह त्रिभुजं सम्पाति जायते। (अवधानं कुर्वन्तु यत् एतयोः द्वयोः त्रिभुजयोः रचना प्रदत्त-भुजा-त्रयेण कृता अस्ति।) अनेन प्रकारेण यदि एकस्य त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः अपरस्य त्रिभुजस्य सङ्गतैः त्रिभिः भुजैः तुल्याः स्युः तर्हि उभे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः। एषः भुजात्रय-सर्वाङ्गसमता-नियमः (SSS सर्वाङ्गतानियमः) इति कथ्यते यस्य विषये भवन्तः पूर्वस्मिन् अध्याये पठितवन्तः सन्ति ।

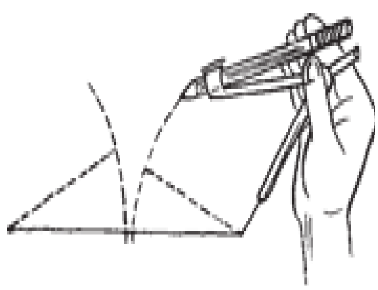
## विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

एकः विद्यार्थी एकम् एतादृशं त्रिभुजम् आलेखितुं प्रयत्नम् अकरोत् यस्य अभ्यासाकृतिः अत्र दत्ता अस्ति। आदौ सः QR इति अलिखत्। तदनन्तरं सः Q इति केन्द्रं मत्वा त्रि-सेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् अलिखत् तथा च R इति केन्द्रं मत्वा द्वि-सेण्टीमीटरमितां च त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अन्यं चापम् अलिखत्। किन्तु सः P इति बिन्दुं न अलभत। अस्य किं कारणम् अस्ति ?अनेन प्रश्नेन सम्बन्धितस्य त्रिभुजस्य कं गुणं भवन्तः जानन्ति ? किम् एतादृशस्य त्रिभुजस्य अस्तित्वं विद्यते ? (त्रिभुजानाम् एतं गुणं स्मरन्तु । कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः योगः सदैव तृतीय-भुजातः अधिकः भवति)।




आकृतिः 10.4 : विचारयन्तु,किम् एतत् उचितम् अस्ति ?





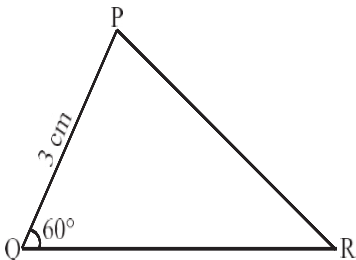
## प्रश्नावली 10.2

1. $\Delta XYZ$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु, यस्मिन् XY इति भुजः 4.5 सेण्टीमीटर्मितः YZ भुजः 5 सेण्टीमीचर्मितः तथा च ZX इति भुजः 6 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति।
2. एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य भुजः 5.5 सेण्टीमीटर्मितः भवेत्।
3. $\Delta PQR$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्मिन् PQ इति भुजः 4 सेण्टीमीटर्परिमितः, QR भुजः 3.5 सेण्टीमीटर्मितः तथा च PR इति भुजः 4 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति। एतत् किम्प्रकारकं त्रिभुजम् अस्ति ?
4. ABC इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु यत्र AB इति भुजः 2.5 सेण्टीमीटरमितः BC इति भुजः 6 सेण्टीमीटर्मितःएवञ्च AC इति भुजा 6.5 सेण्टीमीटर्मितः भवेत्। $\angle B$ इति कोणं परिमापयन्तु।

### 10.5 यदा द्वयोः भुजयोः दीर्घता तथा च तयोर्मध्यवर्तिनः कोणस्य परिमापः दत्तः स्यात् तदा कस्यचित् त्रिभुजस्य रचना ( भुजकोण-भुजनिकषः / SAS निकषः)

अत्र अस्माकं कृते द्वौ भुजौ तयोर्मध्यवर्ती च कोणः दत्तः वर्तते। सर्वप्रथमं वयम् एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः पुनश्च प्रदत्तेषु रेखाखण्डेषु एकं रेखाखण्डम् आलिखामः। तत्पश्चात् अन्ये चरणाः अनुसरणीयाः भवन्ति। द्वितीयम् उदाहरणं पश्यन्तु।

**उदाहरणम् 2** एकं PQR इति त्रिभुजं रचयन्तु, यस्मिन् दत्तं वर्तते यत् PQ इति भुजः 3 सेण्टीमीटर्मितः QR इति भुजः 5.5 सेण्टीमीटर्मितः तथा च $\angle PQR$ $60°$ मितः अस्ति।



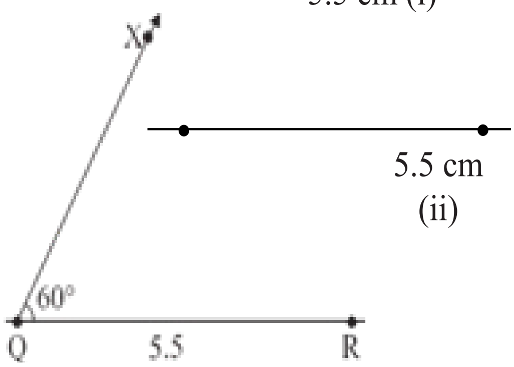
5.5 cm (i)

**समाधानम्**

**चरणः1** आदौ वयं दत्तैः परिमापैः एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः। (अनेन अस्माकं कृते रचनाप्रक्रियायाः निर्धारणे साहाय्यं भविष्यति) [आकृतिः10.5 (i)]।

5.5 cm
(ii)

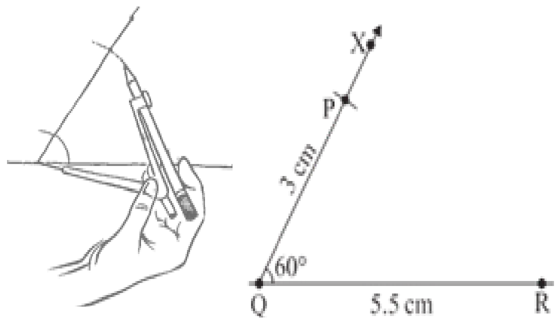
**चरणः2** 5.5 सेण्टीमीटरमित-दीर्घतायाः एकम् QR इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु [आकृतिः10.5(ii)]।



(iii)

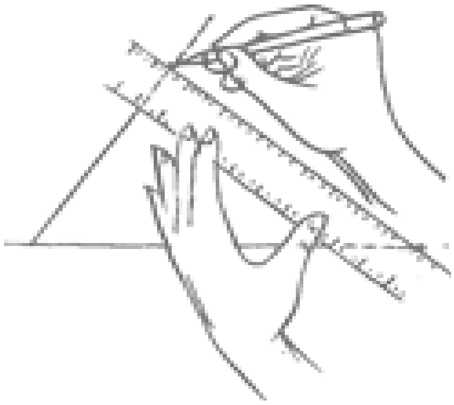
**चरणः3** Q बिन्दौ QX इति किरणम् आलिखन्तु, यः QR इत्यनेन सह $60°$मितस्य कोणं निर्मापयेद्। (P बिन्दुः कोणस्य अस्मिन्नेव किरणे कुत्रचित् स्थितः भविष्यति) [आकृतिः 10.5(iii)]।

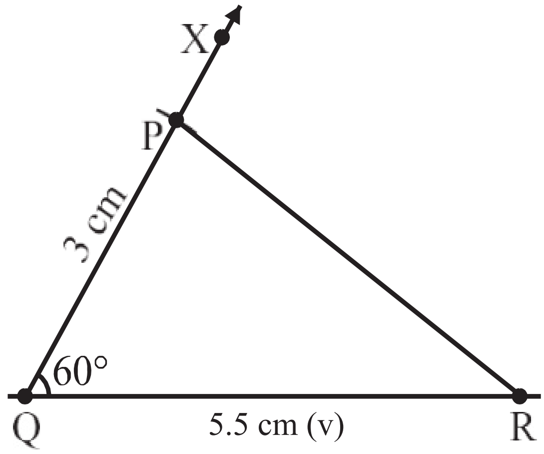
**चरणः4** (P इति बिन्दुं निश्चेतुं QP इति दूरता दत्ता वर्तते।) Q इति केन्द्रं मत्वा 3 सेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। अयं चापः QX इति भुजस्य P बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति [आकृतिः 10.5(iv)]।



(iv)

**चरण:5** PR इत्यस्य योजनं कुर्वन्तु। अनेन प्रकारेण $\Delta PQR$ त्रिभुजं प्राप्यते। [आकृतिः10.5 (v)]।






**आकृतिः 10.5 (i) – (v) -**

## एतान् कुर्वन्तु

आयान्तु अधुना एकम् ABC इति अन्यत् त्रिभुजं रचयाम यस्मिन् AB इति भुजः 3 सेण्टीमीटर्मितः, BC इति भुजा 6.5 सेण्टीमीटरमिता तथा च $\Delta ABC$ 60°मितः भवेत्। $\Delta ABC$ इति त्रिभुजं छित्त्वा $\Delta PQR$ इति त्रिभुजस्य उपरि स्थापयन्तु। वयं किं पश्यामः ? वयं पश्यामः यत् $\Delta ABC$ इति त्रिभुजं $\Delta PQR$ इति त्रिभुजेन सह पूर्णतया सम्पाति जायते अर्थात् तत् आवृणोति। अनेन प्रकारेण यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वौ भुजौ तथा च तयोर्मध्यवर्ती कोणः कस्यचित् अन्यत्रिभुजस्य सङ्गतभुजैः एवं च तेषां मध्यवर्तिकोणेन तुल्याः स्युः तर्हि उभे त्रिभुजे सर्वाङ्समे भवतः। एषः भुजा-कोण-भुजा-सर्वाङ्समतायाः नियमः अथवा निकषः अस्ति, यस्य विषये वयं पूर्वस्मिन् अध्याये पठितवन्तः स्मः। (अवधानं कुर्वन्तु यत् उभयोः त्रिभुजयोः रचना दत्ताभ्यां भुजाभ्यां तथा च तयोर्मध्यवर्तिना कोणेन कृता अस्ति )

## विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

उपर्युक्तायां रचनायां द्वयोः भुजयोः दीर्घताः एकस्य च कोणस्य परिमापः दत्ताः आसन्। अधुना निम्नलिखित-समस्यायाः अध्ययनं कुर्वन्तु :

$\Delta ABC$ इति कस्मिंश्चित् त्रिभुजे यदि AB इति भुजः 3 सेण्टीमीचर्मितः, AC इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्मितः तथा च $\angle C$ इति कोणः 30°मितः अस्ति तर्हि किं वयम् अस्य त्रिभुजस्य रचनां कर्तुम् शक्नुमः ? वयम् 5 सेण्टीमीटर्मितम् AC इति भुजम् आलिख्य 30°मितं $\angle C$ इति कोणम् आलेखितुं शक्नुमः। $\angle C$ कोणस्य एकः भुजः CA अस्ति। B बिन्दुः C कोणस्य अपरस्मिन् भुजे कुत्रचित् स्थितः स्यात्। किन्तु अवधानं कुर्वन्तु यत् B बिन्दोः केनचित् अद्वितीयरूपेण निर्धारणं नैव कर्तुं शक्नुमः। अतः ABC इति त्रिभुजस्य रचनायै प्रदत्तानि तथ्यानि पर्याप्तानि न सन्ति।

अधुना, $\Delta ABC$ इति त्रिभुजस्य रचनायाः प्रयासं कुर्वन्तु यदि AB इति भुजः 3 सेण्टीमीटर्मितः AC इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्मितः तथा च $\angle B$ इति कोणः 30° मितः अस्ति। वयं किं पश्यामः ? पुनः $\Delta ABC$ इति त्रिभुजस्य रचना अद्वितीयरूपेण नैव कर्तुं शक्यते। अनेन प्रकारेण वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः

यत्  कस्यचित् अद्वितीय-त्रिभुजस्य रचना तदा एव कर्तुं शक्यते यदा तस्य द्वयोः भुजयोः दीर्घताः तथा च तयोर्मध्यवर्तिनः कोणस्य परिमापाः दत्ताः स्युः ।

## प्रश्नावली 10.3

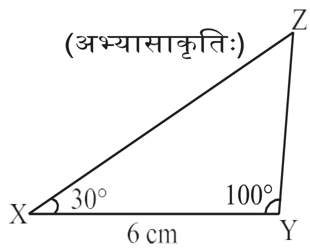
1. $\Delta DEF$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदि DE इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्मितः DF इति भुजा भुजः 3 सेण्टीमीटर्मितः तथा च $m\angle EDF$ इति कोणः  $90°$ मितः इति स्यात् ।
2. एकं समद्विबाहु-त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य प्रत्येकं समानभुजस्य दीर्घता दीर्घता 6.5 सेण्टीमीटरमिता भवेत् तथा च मध्यवर्ति-कोणः $110°$ इति भवेत् ।
3. BC इति भुजः 7.5 सेण्टीमीटर्मितः तथा च AC इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्मितः तथा च $m\angle C$ इति कोणः  $60°$ मितः स्यात् तदा  ABC इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु ।

### 10.6 कस्यचित् त्रिभुजस्य रचना यदा तस्य द्वयोः कोणयोः परिमापः एवञ्च एतयोः कोणयोः मध्यवर्तिभुजस्य दीर्घता दत्ता भवेत् ( कोण-भुज-कोणनिकषः / ASAनिकषः)

यथा पूर्वं कृतं तथैव एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखन्तु । अधुना प्रदत्तं रेखाखण्डम् आलिखन्तु । उभयोः अन्तिमबिन्द्वोः कोणं निर्मान्तु । तृतीयम् उदाहरणं पश्यन्तु ।

**उदाहरणम् 3** $\Delta XYZ$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदि XY इति  भुजः 6 सेण्टीमीटर्मितः  $m\angle ZXY$ इति कोणः $30°$मितः तथा च $m\angle XYZ$ इति कोणः $100°$मितः अस्ति ।

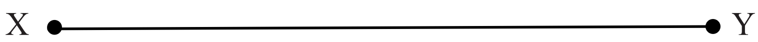
**समाधानम्**



(i)

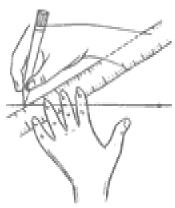
**चरणः1** वास्तविकरचनायाः पूर्वं  वयं अस्मिन्  अङ्कितान् परिमापान् अनुसृत्य एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखामः । (अनेन काचित् ऊहा जायते यत् रचना कथं कर्त्तव्या ) [आकृतिः10.6(i)]।

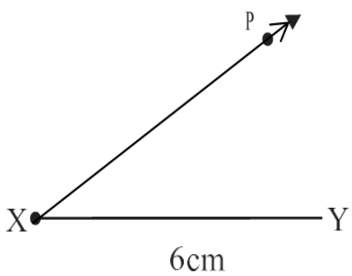
**चरणः2** XY इति एकं  रेखाखण्डम् आलिखन्तु यस्य दैर्घ्यं 6 सेण्टीमीटरमितम् अस्ति । [आकृतिः10.6(ii)]।



6 cm   (ii)

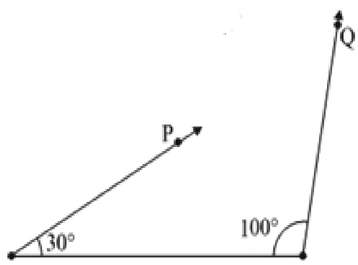
**चरणः3** X इति बिन्दौ XP इति किरणम् आलिखन्तु । अयं किरणः XYतः $30°$ मितकोणस्य निर्माणं कुर्यात् । प्रदत्त-प्रतिबन्धानुसारं Z बिन्दुः XP किरणे  कुत्रचित् स्थितः स्यात् [आकृतिः 10.6 (iii)] ।





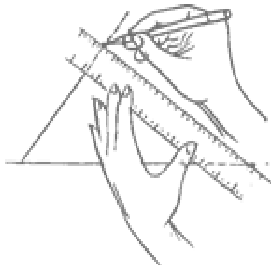
(iii)

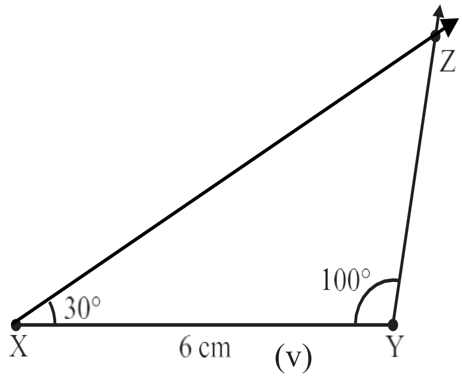
**चरणः 4** Y इति  बिन्दौ YQ इति किरणम् आलिखन्तु । अयं किरणः YXतः $100°$ मितकोणस्य निर्माणं कुर्यात् । प्रदत्त-प्रतिबन्धानुसारं Z बिन्दुः YQ किरणे  अपि अवश्यमेव स्थितः स्यात्  [आकृतिः 10.6 (iv)] ।



(iv)

**चरण:5** Z बिन्दुः XP एवञ्च YQ इत्येतयोः उभयोः किरणयोः स्थितः स्यात् । अतः Z एतयोः उभयोः किरणयोः प्रतिच्छेदक-बिन्दुः अस्ति । अधुना $\Delta XYZ$ त्रिभुजं पूर्णतया निर्मितं भवति [आकृतिः10.6(v)]।






**आकृतिः10.6 (i) – (v)**

## एतान् कुर्वन्तु

अधुना LMN इति एकम् अन्यत् त्रिभुजम् आलिखन्तु, यस्मिन् $m\angle NLM$ इति कोणः 30° मितः अस्ति । LM इति भुजः 6 सेण्टीमीटर्मितः तथा च $m\angle NML$ इति कोणः 100°मितः स्यात् । एतत् LMN त्रिभुजं छित्त्वा XYZ त्रिभुजे स्थापयन्तु । वयं पश्यामः यत् LMN त्रिभुजं XYZ त्रिभुजेन सह पूर्णतया सम्पाति जायते । इत्थम्, यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ अपरत्रिभुजस्य सङ्गतकोणाभ्यां तयोः मध्यवर्ती भुजस्य तुल्याः भवेयुः तदा उभे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः । एषः ASA कोण-भुजा-कोण-सर्वाङ्गसमतानियमः अथवा निकषः अस्ति, यस्य विषयो वयं पूर्वस्मिन् अध्याये अध्ययनं कृतवन्तः स्मः । (अवधानं कुर्वन्तु यत् अत्र उभयोः त्रिभुजयोः रचना कृता अस्ति यदा उभौ कोणौ तयोः मध्यवर्ती भुजस्य दत्ता आसीत् ।)

## विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

उपर्युक्ते उदाहरणे एकस्य भुजस्य दीर्घता द्वयोः कोणयोः च परिमापाः दत्ताः आसन् । अधुना निम्नलिखित-समस्यायाः अध्ययनं कुर्वन्तु -

$\Delta ABC$ इति त्रिभुजे यदि AC इति भुजः 7 सेण्टीमीटर्मितः, $m\angle A$ इति कोणः 60° मितः एवञ्च $m\angle B$ इति कोणः 50° मितः अस्ति तर्हि किं भवन्तः त्रिभुजस्य रचनां कर्तुं शक्नुवन्ति ?
(त्रिभुजस्य कोण-सह-गुणः भवतां सहायतां करिष्यति । )

## प्रश्नावली 10.4

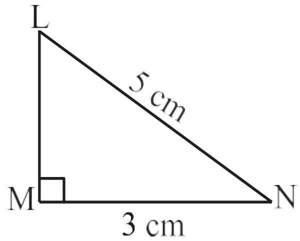
1. $\Delta ABC$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु, यदा $m\angle A$ इति कोणः 60°मितः , $m\angle B$ इति कोणः 30° मितः एवञ्च AB इति भुजः 5.8 सेण्टीमीटर्मितः प्रदत्तं वर्तते ।
2. $\Delta PQR$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यदि PQ इति भुजः 5 सेण्टीमीटर्मितः, $m\angle PQR$ इति कोणः 105° मितः एवञ्च $m\angle QRP$ इति कोणः 40° मितः दत्तः वर्तते ।
(सङ्केतः - त्रिभुजस्य कोण-सह-गुणं स्मरन्तु) ।
3. किं भवन्तः $\Delta DEF$ इति त्रिभुजस्य रचनां कर्तुं शक्नुवन्ति अथवा न इति अवेक्षणं कुर्वन्तु । यदि EF इति भुजः 7.2 सेण्टीमीटर्मितः, $m\angle E$ इति कोणः 110° मितः तथा च $m\angle F$ इति कोणः 80° मितः अस्ति । स्वस्य उत्तरस्य पुष्टिम् अपि कुर्वन्तु ।

## 10.7 कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य रचना, यदा तस्य एकपादस्य (भुजस्य) कर्णस्य च दीर्घताः दत्ताः स्युः। (RHS निकषः)

अत्र अभ्यासाकृतेः निर्माणं सरलम् अस्ति। इदानीं प्रदत्त-भुजस्य अनुसारम् एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु। अस्य एकस्मिन् अन्तिमबिन्दौ एकं समकोणं निर्मान्तु। त्रिभुजस्य प्रदत्तदीर्घतानां भुजां कर्णं च आलेखितुं परिकरस्य उपयोगं कुर्वन्तु। त्रिभुजं पूरयन्ताम्। निम्नलिखितम् उदाहरणं विचारयन्तु -

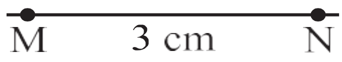
**उदाहरणम् 4** $\Delta LMN$ इति त्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य $\angle LMN$ इति कोणः समकोणः अस्ति तथा च दत्तं च वर्तते यत् LN इति भुजः 5 सेण्टीमीचर्मितः एवञ्च MN इति भुजः 3 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति।

**समाधानम्**



(i)

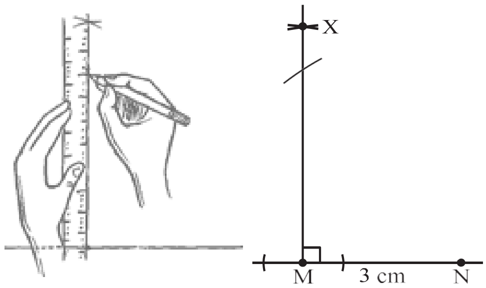
**चरणः 1** एकाम् अभ्यासाकृतिम् आलिखन्तु तस्मिन् च प्रदत्तं परिमापम् अङ्कयन्तु। स्मरणं भवेत् यत् समकोणस्य अङ्कनं करणीयम् अस्ति। [आकृतिः 10.7(i)]।



(ii)

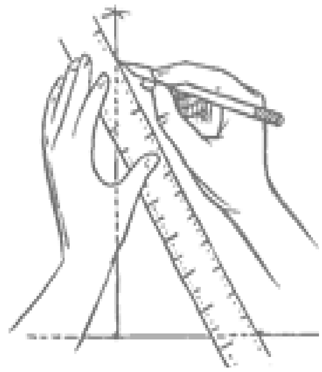
**चरणः 2** MN इति एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु यस्य दैर्घ्यं 3 सेण्टीमीटरमितं वर्तते। [आकृतिः10.7 (ii)]।

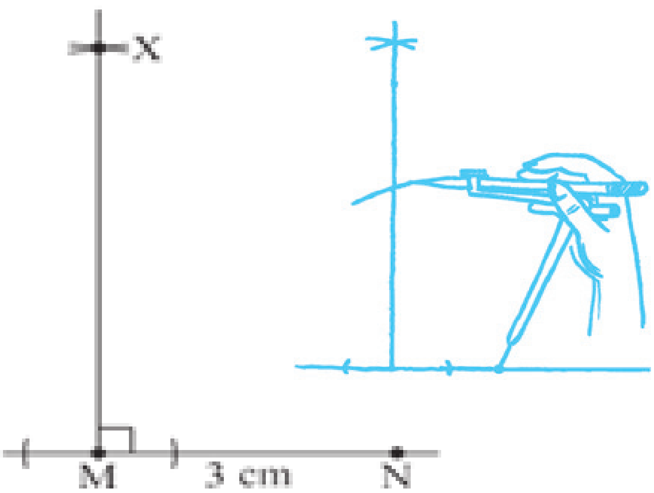
**चरणः 3** M बिन्दौ $MX \perp MN$ इति आलिखन्तु। (L इति बिन्दुः अस्मिन् लम्बे एव कुत्रचित् स्थितः स्यात्) [आकृतिः10.7 (iii)]।



(iii)

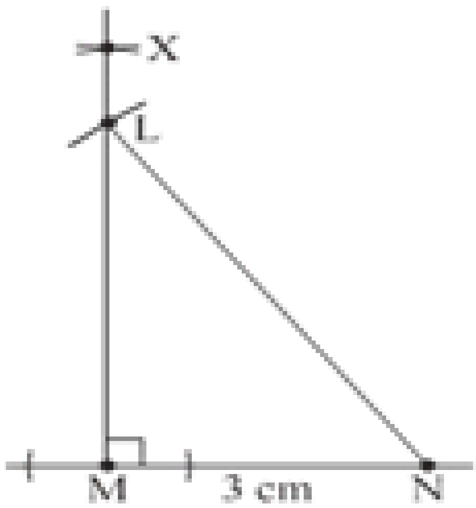
**चरणः 4** N बिन्दुं केन्द्रं मत्वा 5 सेण्टीमीटरमितां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकं चापम् आलिखन्तु। (L बिन्दुः अस्मिन् एव चापे कुत्रचित् स्थितः स्यात् यतोहि अयं बिन्दुः N बिन्दुतः 5 सेण्टीमीटरमिते दूरे वर्तते) [आकृतिः 10.7(iv)]।





(iv)

**चरणः5** L बिन्दुः MX इति लम्बरेखायां तथा च N इति केन्द्रवति चापे स्थितः स्यात्। अतः L बिन्दुः अनयोः उभयोः प्रतिच्छेद-बिन्दुः भविष्यति। L तथा च N बिन्दू योजयन्तु। अधुना $\Delta LMN$ इति त्रिभुजं प्राप्तं भवति। [आकृतिः10.7(v)] ।



**आकृतिः 10.7(i)-(v)** (v)

## प्रश्नावली 10.5

1. $\Delta PQR$ इति समकोणस्य रचनां कुर्वन्तु, यत्र $m\angle Q$ इति कोणः 90°मितः तथा च QR इति भुजः 8 सेण्टीमीटर्मितः एवञ्च PR इति भुजः 10 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति।
2. एकस्य समकोणत्रिभुजस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य कर्णः 6 सेण्टीमीटरमितः दीर्घः वर्तते तथा च एकः पादः 4 सेण्टीमीटरमितः दीर्घः अस्ति।
3. ABC इति एकं समद्विबाहु-त्रिभुजं रचयन्तु यत्र $m\angle ACB$ इति कोणः 90°मितः अस्ति एवञ्च AC इति भुजः 6 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति।

### विविधाः प्रश्नाः

अधः केषाञ्चन त्रिभुजानां कोणानाञ्च परिमापाः दत्ताः सन्ति। एतेषु तेषां परिचयनं कुर्वन्तु येषां रचना नैव कर्तुं शक्यते तथा च एतदपि ज्ञापयन्तु यत् भवन्तः एतेषां रचनां किमर्थं न कर्तुं शक्नुवन्ति ? शेषत्रिभुजानां रचनां कुर्वन्तु।

| | **त्रिभुजानि** | | **प्रदत्ताः परिमापाः** | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Delta ABC$ | $m\angle A = 85°$, | $m\angle B = 115°$, | AB = 5 से.मी. |
| 2. | $\Delta PQR$ | $m\angle Q = 30°$, | $m\angle R = 60°$, | QR = 4.7 से.मी. |
| 3. | $\Delta ABC$ | $m\angle A = 70°$, | $m\angle B = 50°$, | AC = 3 से.मी. |
| 4. | $\Delta LMN$ | $m\angle L = 60°$, | $m\angle N = 120°$, | LM = 5 से.मी. |
| 5. | $\Delta ABC$ | BC = 2 से.मी., | AB = 4 से.मी., | AC = 2 से.मी. |
| 6. | $\Delta PQR$ | PQ = 3.5 से.मी., | QR = 4 से.मी., | PR = 3.5 से.मी. |
| 7. | $\Delta XYZ$ | XY = 3 से.मी., | YZ = 4 से.मी., | XZ = 5 से.मी. |
| 8. | $\Delta DEF$ | DE = 4.5 से.मी., | EF = 5.5 से.मी., | DF = 4 से.मी. |

### अस्माभिः का चर्चा कृता ?

अस्मिन् अध्याये वयं मापिकायाः परिकरस्य च केषाञ्चित् रचनानां विधीनां विषये अध्ययनं कृतवन्तः स्मः।

1. कस्याश्चित् प्रदत्त-रेखायाः तथा च एतादृशस्य बिन्दोः कृते यः अस्यां रेखायां स्थितः नास्ति, वयं तिर्यक्-छेदि-रेखाकृतौ, रेखायाः समान्तराम् एकां रेखाम् आलेखितुं समानैकान्तर-कोणानाम् अवधारणायाः उपयोगं कृतवन्तः। अस्याः रचनायाः कृते वयं समानसङ्गत-कोणानाम् अवधारणायाः उपयोगम् अपि कर्तुं शक्नुमः।
2. त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः विषयस्य अप्रत्यक्षरूपेण उपयोगं कुर्वन्तः वयं त्रिभुज-रचनाविधेः विषये अध्ययनं कृतवन्तः।

   अस्मिन् अध्याये निम्नलिखितानाम् उदाहरणानां विषये चर्चा कृता।

   (i) भुजत्रयम् / SSS : त्रिभुजस्य त्रयाणां भुजानां दीर्घताः दत्ताः सन्ति।

   (ii) भुज-कोण-बुज / SAS : कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः दीर्घता एवं च तयोः भुजयोः मध्यवर्ति-कोणस्य परिमापः दत्तः अस्ति।

   (iii) कोण-कोण-भुज / AAS : द्वयोः कोणयोः परिमापः तथा च तयोः कोणयोः मध्यवर्ति-भुजस्य दीर्घता दत्ता अस्ति।

   (iv) RHS: समकोणत्रिभुजस्य कर्णस्य एकस्य च पादस्य दीर्घता दत्ता अस्ति।